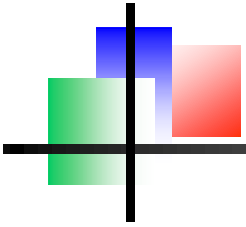


Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

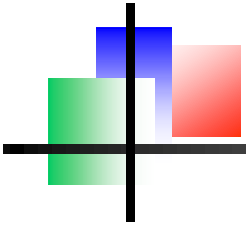
wykład 5, 27.02.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



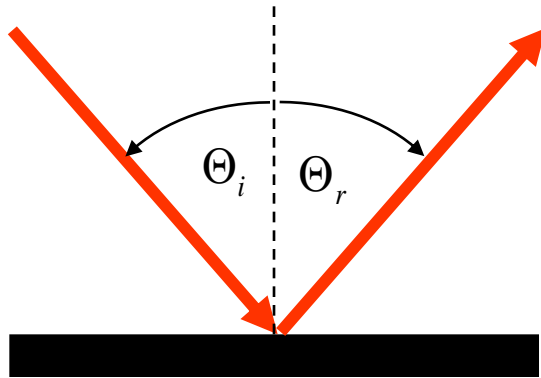
Wykład 4 - przypomnienie

- dielektryki
- model Lorentza współczynnika załamania światła dla gazów
- dielektryki, faza skondensowana - Clausius-Mossotti
- fale EM w przewodniku: częstość plazmowa, zespolony współczynnik załamania, absorpcja
- widmo światła; definicja operacyjna; transformata Fouriera i amplituda spektralna, twierdzenie Parsewala, twierdzenie Wienera-Chinczyna
- barwy
- oko ludzkie i widzenie barwne
- barwy czyste (światło monochromatyczne) i mieszane
- trójkąt barw



odbicie i załamanie światła

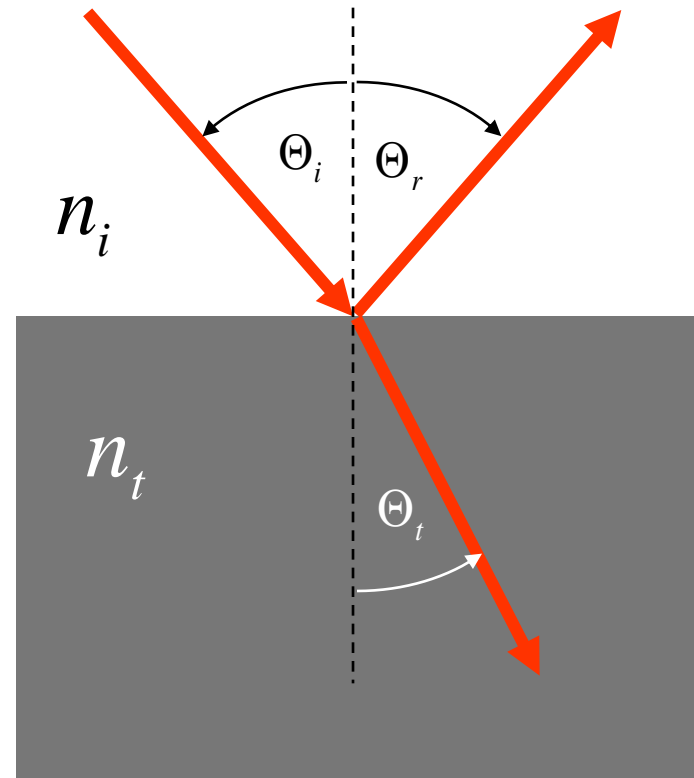
Rozważmy fale płaskie



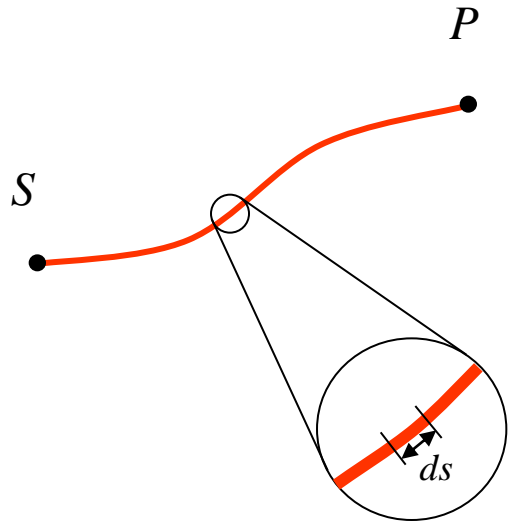
obowiązują proste reguły:

$$\theta_i = \theta_r$$

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$



Zasada Fermata

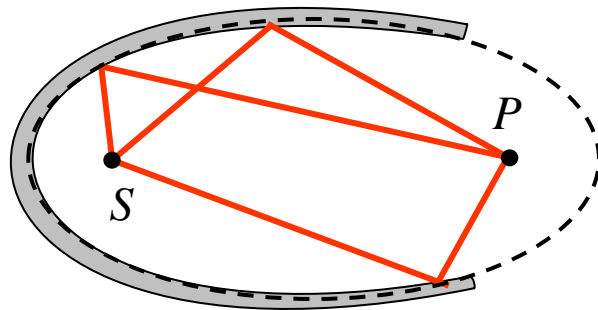


droga optyczna (DO)

$$DO = \int n(\vec{r}) ds$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{n(\vec{r})}{c} ds$$
$$t = \frac{DO}{c}$$

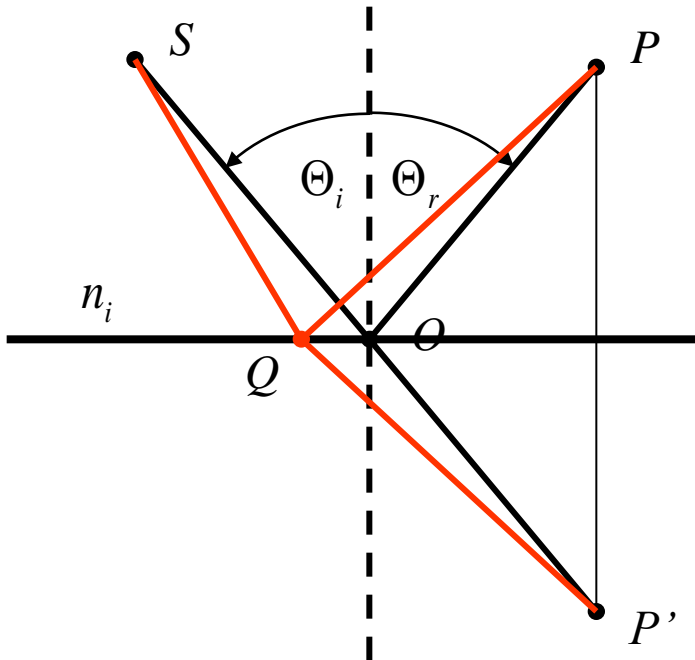
Zasada Fermata:
 DO ma wartość ekstremalną



Pierre Fermat (1601-1665)

zasada Fermata - odbicie

Zasada Fermata: światło rozchodzi się po najkrótszej drodze (optycznej)



$$t_1 = \frac{SO + OP}{v_i}$$
$$t_2 = \frac{SQ + QP}{v_i}$$

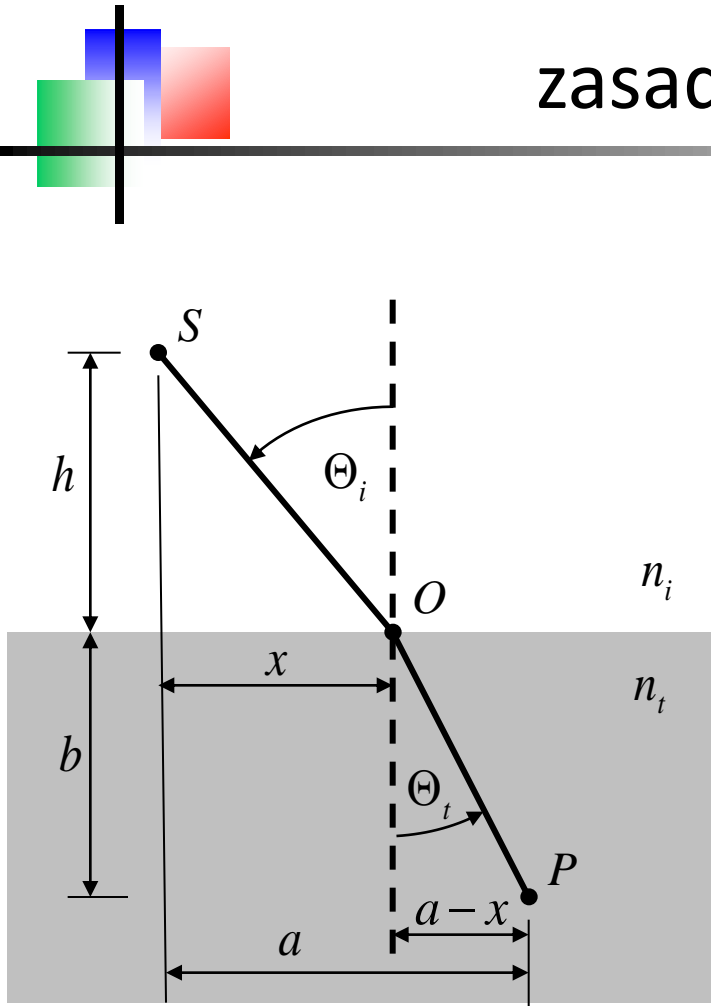
Czas t_1 jest minimalny bo:

$$SQ + QP = SQ + QP' > SP' = SO + OP$$

Stąd

$$\theta_i = \theta_r$$

zasada Fermata - załamanie



$$t = \frac{SO}{v_i} + \frac{OP}{v_t} =$$
$$= \frac{(h^2 + x^2)^{1/2}}{v_i} + \frac{[b^2 + (x-a)^2]^{1/2}}{v_t}$$

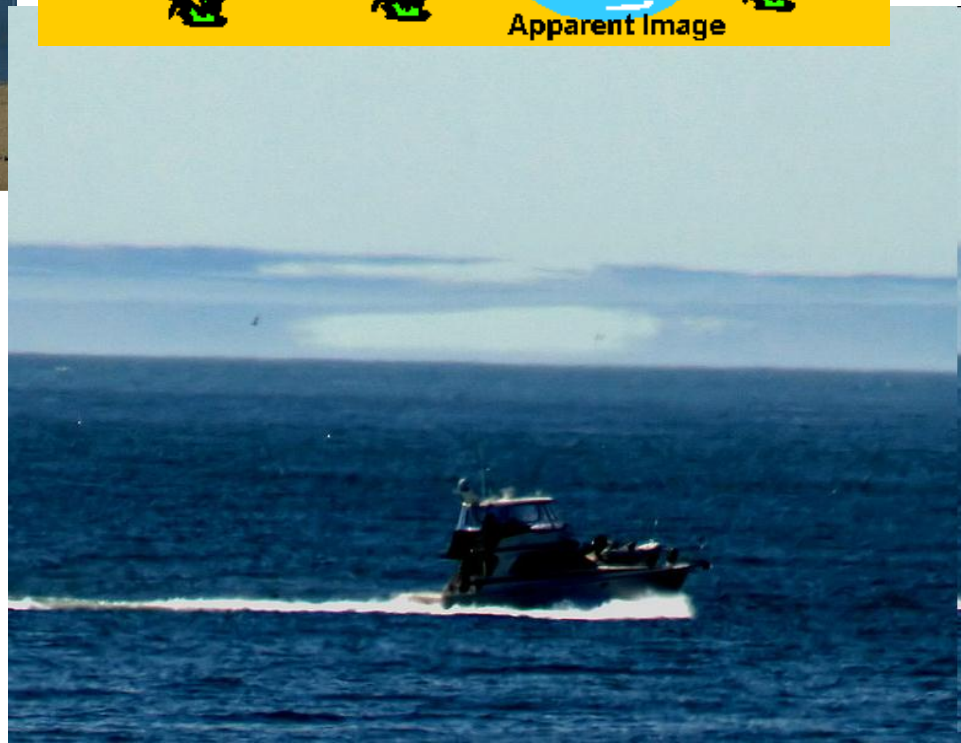
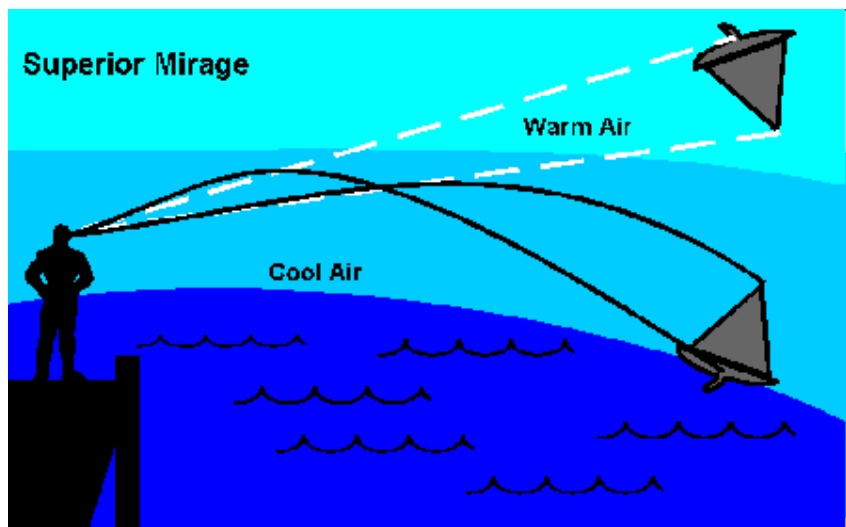
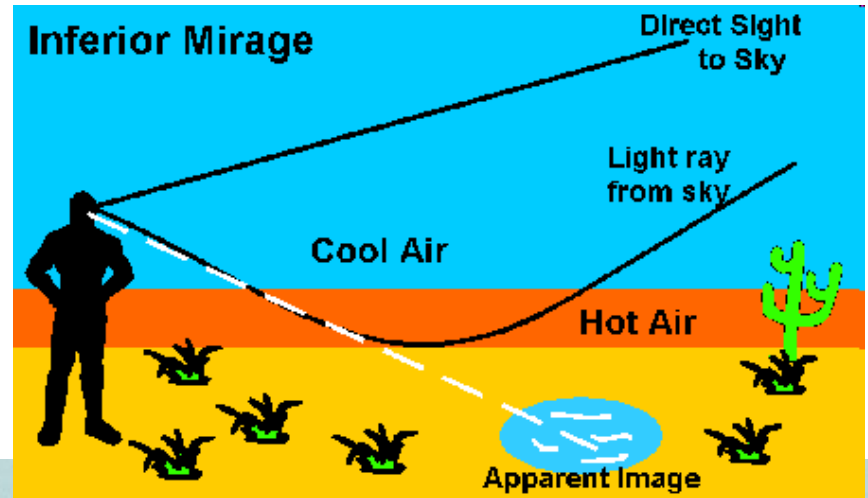
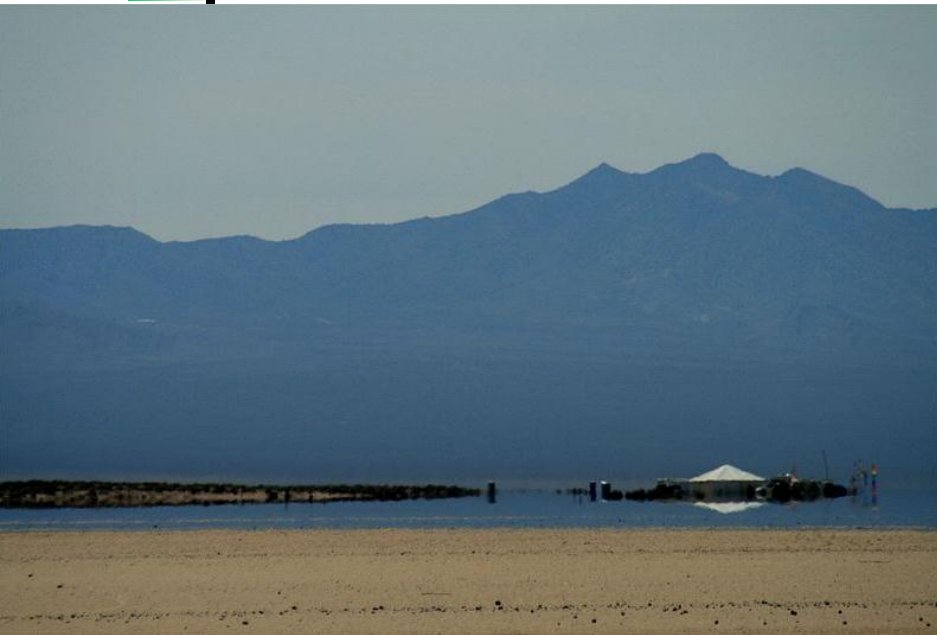
$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i(h^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{a-x}{v_t[b^2 + (x-a)^2]^{1/2}} = 0$$

$$\frac{\sin\Theta_i}{v_i} = \frac{\sin\Theta_t}{v_t}$$

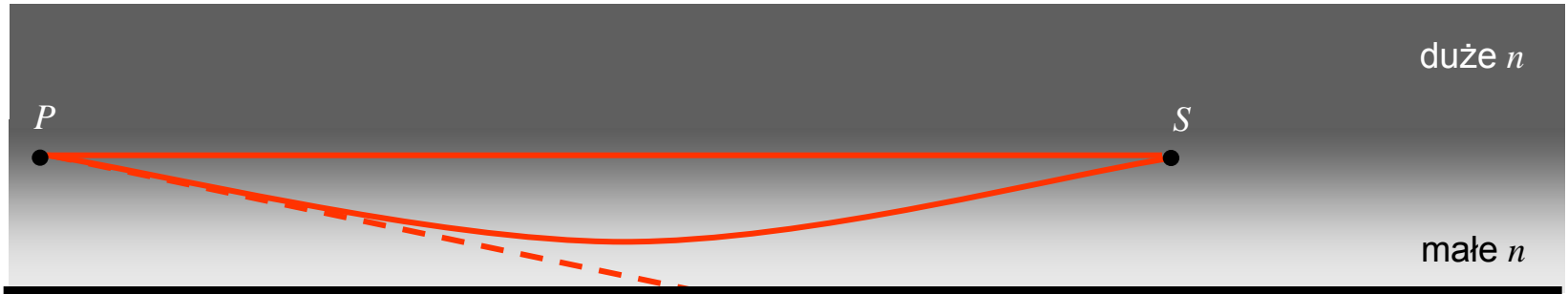
$$n_i \sin\Theta_i = n_t \sin\Theta_t$$

czyli prawo Snella

Miraze, 1



miraż



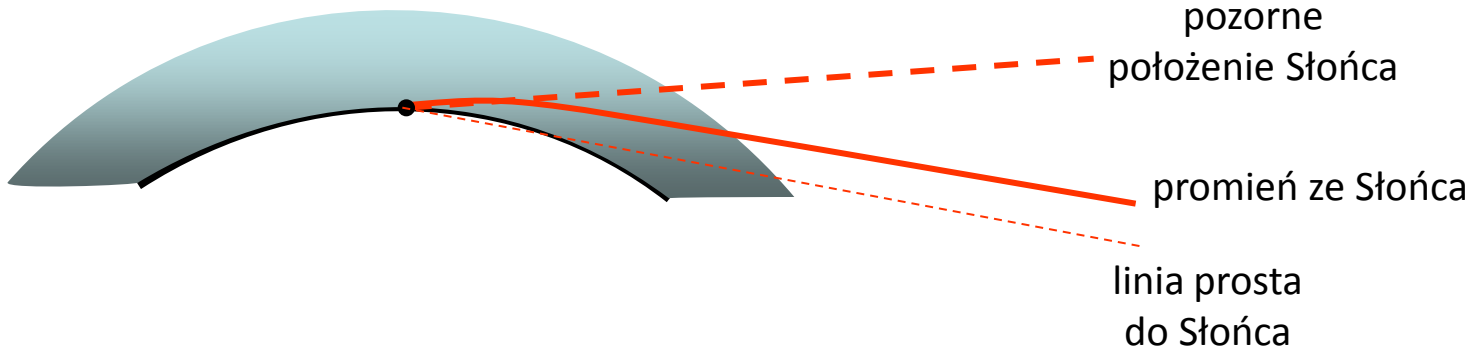
Dla gazów mamy z modelu Lorentza:

$n - 1 \propto \rho$ (ρ jest gęstością gazu)

A ponieważ $\rho \propto 1/T$ to $n - 1 \propto 1/T$ gdzie T jest temperaturą gazu

pozorne
położenie punktu S

rozgrzana
powierzchnia asfaltu

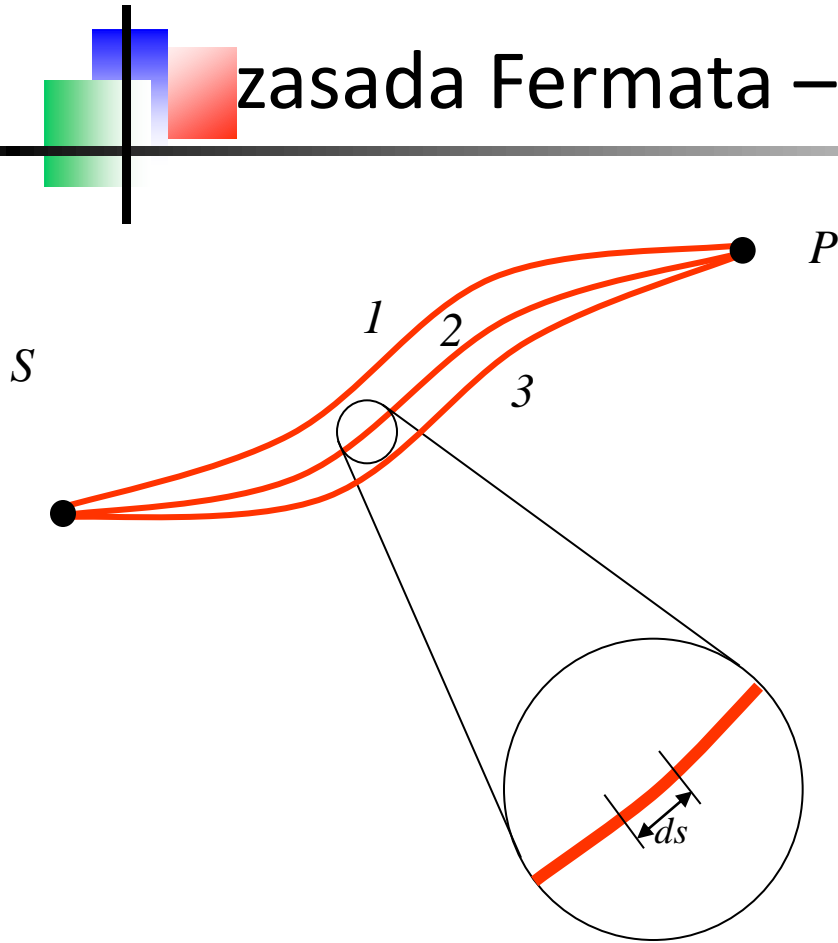


pozorne
położenie Słońca

promień ze Słońca

linia prosta
do Słońca

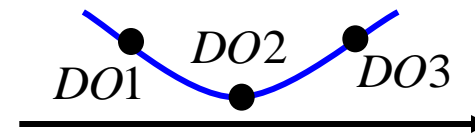
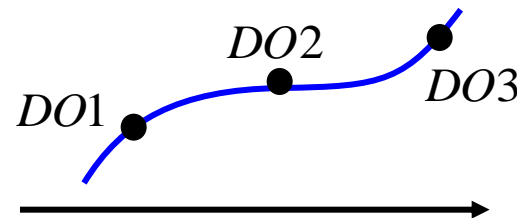
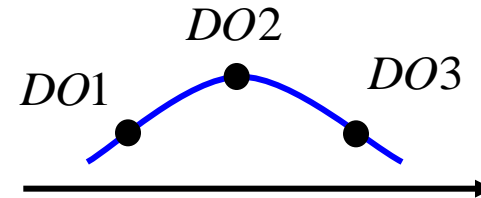
zasada Fermata – sformułowanie współczesne



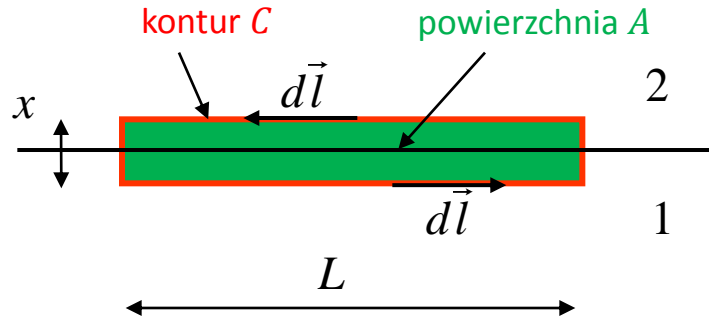
droga optyczna (DO)

$$DO = \int n(\vec{r}) ds$$

trajektoria promienia – punkt stacjonarny drogi optycznej



ciągłość pól EM na granicy dielektryków



Z prawa Faradaya:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$x \rightarrow 0$ to $A \rightarrow 0$ czyli $\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = 0$

Zatem

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_{t1} - E_{t2})L = 0$$

czyli

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Podobnie, z prawa Ampera mamy

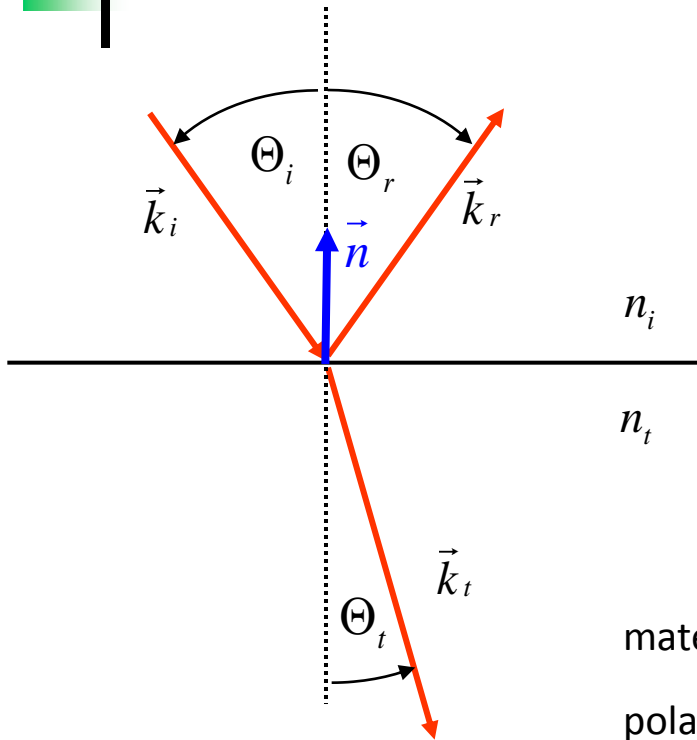
$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \epsilon\epsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

i przejście do granicy $x \rightarrow 0$ daje

$$H_{t1} = H_{t2}$$

Składowe pól elektrycznego i magnetycznego styczne do granicy pomiędzy ośrodkami są ciągłe na tej granicy

pola na granicy dielektryków, 1



Płaska, monochromatyczna fala padająca \Rightarrow
fala odbita i fala załamana też są płaskie

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

materiał izotropowy - wszystkie pola są poprzeczne, składowa

pola \vec{E} styczna do granicy to $\vec{n} \times \vec{E}$,

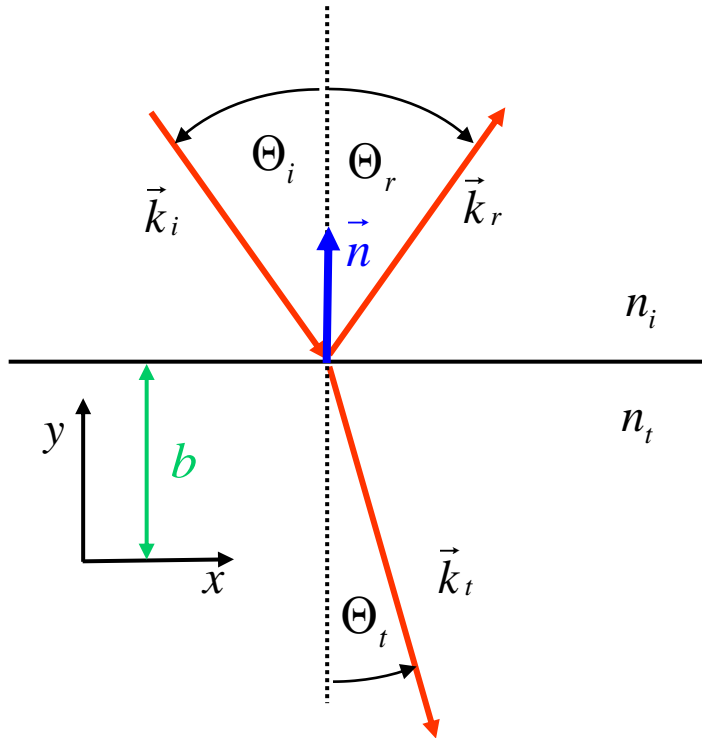
zatem ciągłość składowej stycznej pola opisuje r-nie

$$\vec{n} \times \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{n} \times \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{n} \times \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

dla dowolnego punktu na granicy ośrodków i dowolnego czasu

pola na granicy ..., 2

dla dowolnego czasu i dowolnego punktu na granicy styczna składowa pola elektrycznego jest ciągła: $\vec{n} \times \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{n} \times \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{n} \times \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$



jest to możliwe tylko wtedy gdy są spełnione równocześnie dwa warunki

1. $\omega_r = \omega_t = \omega_i$
2. $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} = \vec{k}_i \cdot \vec{r}$ w dowolnym punkcie na granicy

Konsekwencje

- obicie:

dla danego b i każdego x :

$$k_i \sin \Theta_i x + k_i \cos \Theta_i b = k_r \sin \Theta_r x + k_r \cos \Theta_r b$$

$$\Theta_r = \Theta_i$$

- załamanie:

dla danego b i każdego x :

$$k_i \sin \Theta_i x + k_i \cos \Theta_i b = k_t \sin \Theta_t x + k_t \cos \Theta_t b$$

$$\frac{n_i \omega}{c} \sin \Theta_i = \frac{n_t \omega}{c} \sin \Theta_t$$

$$n_i \sin \Theta_i = n_t \sin \Theta_t$$

wykt. 2: przypomnienie

Rozważmy izotropowy dielektryk. Jeśli założymy falę płaską monochromatyczną spolaryzowaną liniowo w kierunku y :

$$\vec{E} = [0, E_y, 0]$$

$$E_y = E_{y0} e^{i(kx - \omega t)}$$

to z równania Maxwella

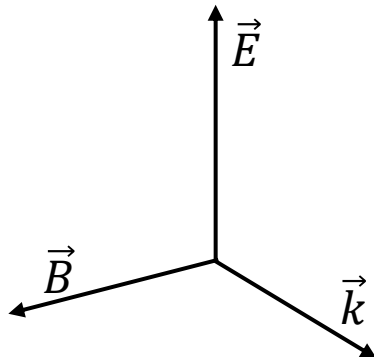
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

mamy

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -ikE_{y0} e^{i(kx - \omega t)}$$

czyli

$$B_z = -ikE_{y0} e^{ikx} \int e^{-i\omega t} dt = \frac{n}{c} E_y$$



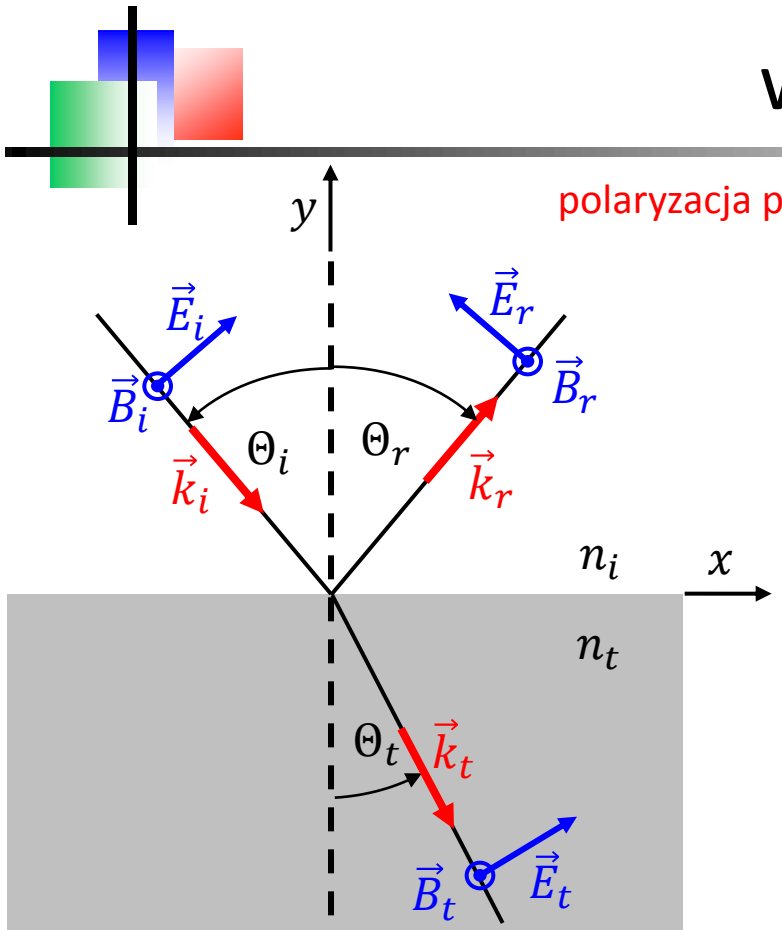
W ogólnym przypadku mamy dla izotropowego dielektryka:

$$|\vec{B}| = \frac{n}{c} |\vec{E}|$$

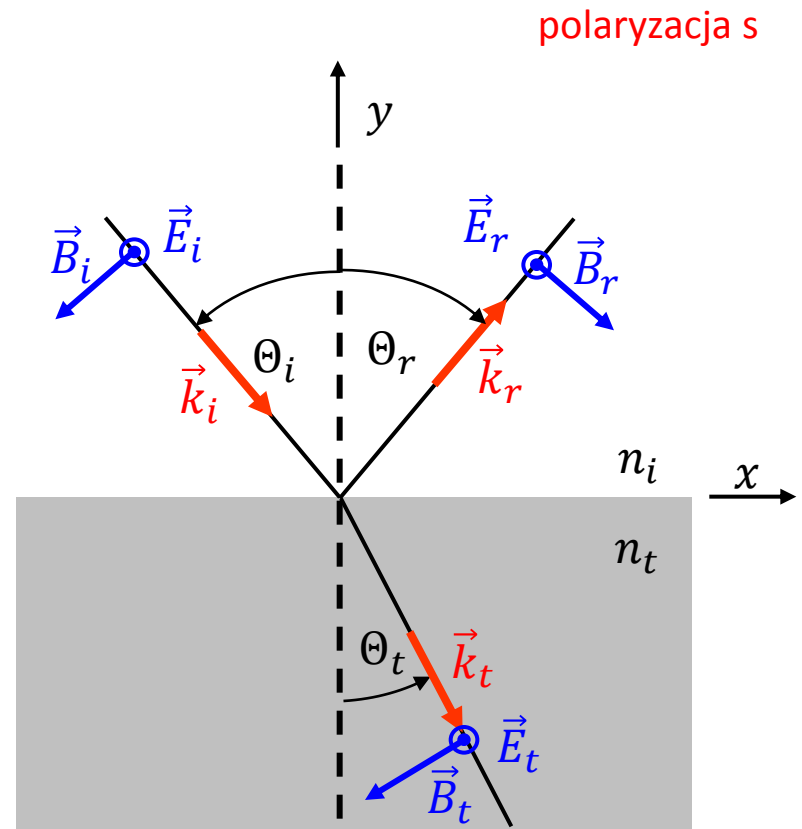
oraz

$$\vec{B} \perp \vec{E}, \quad \vec{B} \perp \vec{k}, \quad \vec{E} \perp \vec{k}$$

wzory Fresnela



dwie liniowe polaryzacje światła: p, s

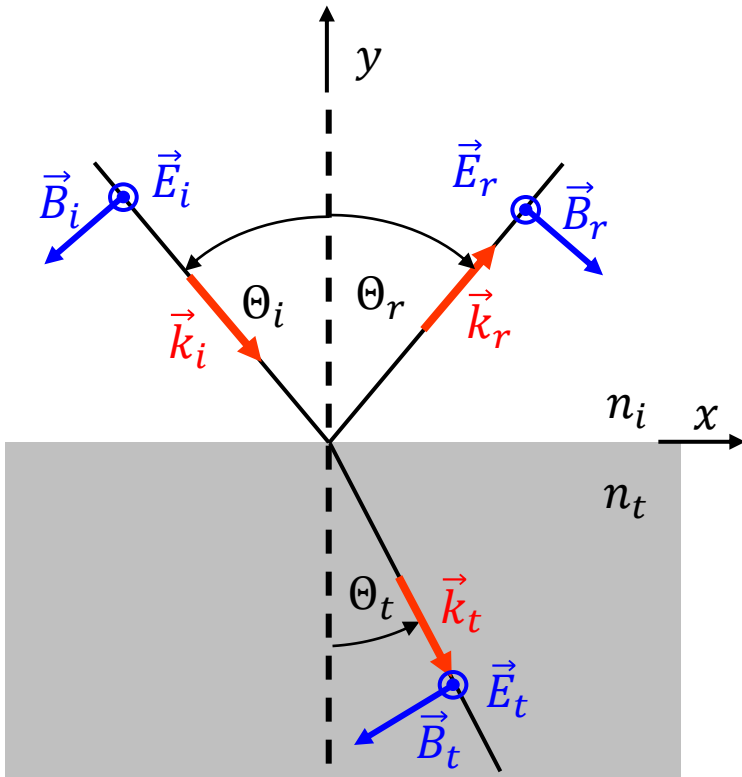


\otimes - wektor „wbity” w ekran

\otimes - wektor wystaje z ekranu

wzory Fresnela \perp , 1

polaryzacja \perp (s)



• pole elektr.: składowa styczna = pole

• pole magnet.: $H_i^t = -H_i \cos \Theta_i$
 $H_r^t = H_r \cos \Theta_r$
 $H_t^t = -H_t \cos \Theta_t$

Górny indeks t oznacza składową styczną do granicy.

Wyrażamy pole magnetyczne przez indukcję:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}$$

Wypisujemy warunki ciągłości składowych stycznych:

• pole elektryczne:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (1)$$

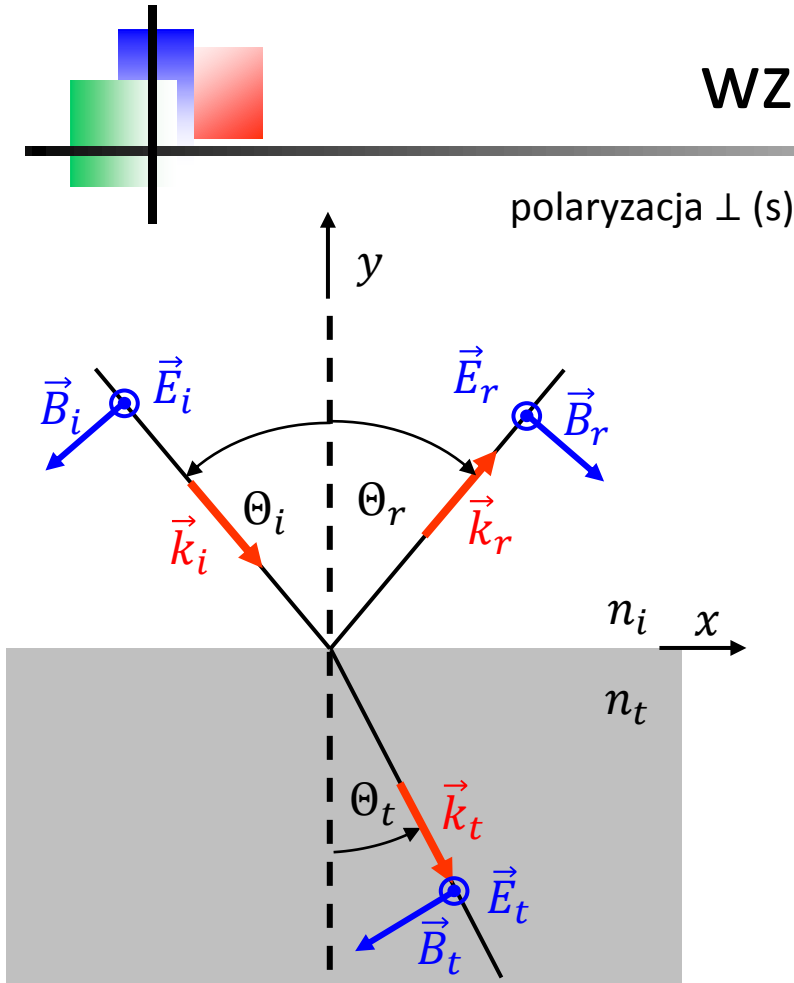
• pole magnetyczne:

$$-H_{i0} \cos \Theta_i + H_{r0} \cos \Theta_r = -H_{t0} \cos \Theta_t$$

i wyrażamy pole magnetyczne przez pole elektryczne

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{i0} - E_{r0}) \cos \Theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{t0} \cos \Theta_t \quad (2)$$

wzory Fresnela \perp , 2



Rozwiązujemy r-nia (1) i (2) szukając stosunków amplitud:

$$1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}$$

$$\frac{n_i}{\mu_i} \left(1 - \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \cos \Theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} \frac{E_{t0}}{E_{i0}} \cos \Theta_t$$

Wynik:

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t}$$

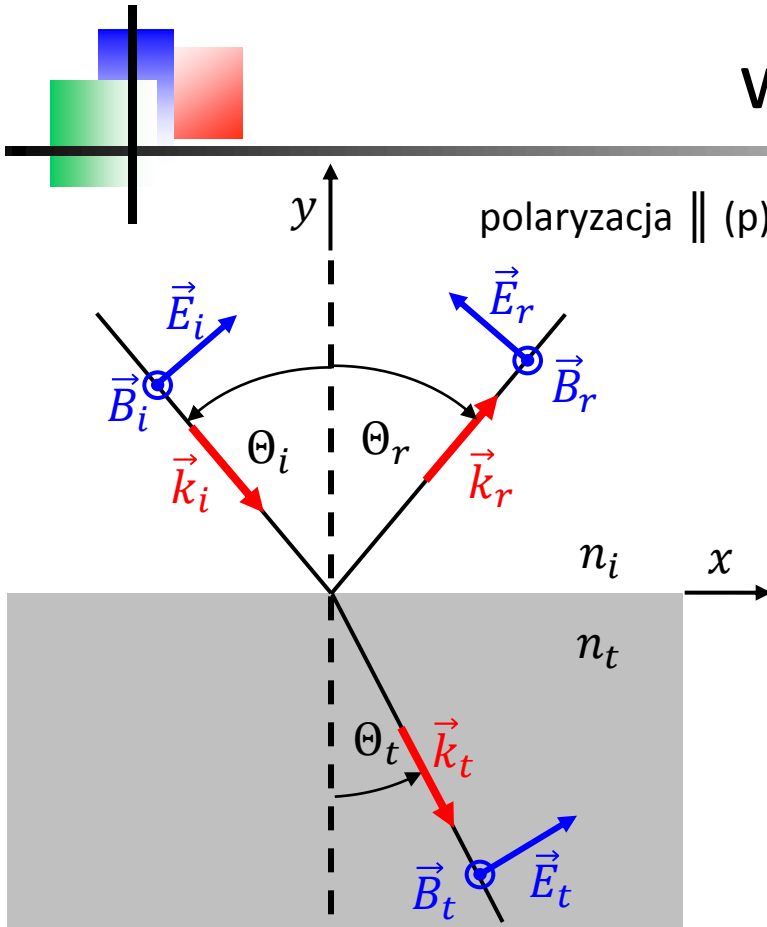
$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_t}$$

dla materiałów niemagnetycznych ($\mu_i = \mu_t$):

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \Theta_i - n_t \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_i + n_t \cos \Theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos \Theta_i}{n_i \cos \Theta_i + n_t \cos \Theta_t}$$

wzory Fresnela II



Postępujemy identycznie jak dla polaryzacji s.

wyniki (bez wyprowadzania):

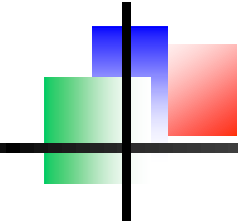
$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i}$$

$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \Theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \Theta_i}$$

dla materiałów niemagnetycznych:

$$\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{n_i \cos \Theta_t - n_t \cos \Theta_i}{n_i \cos \Theta_t + n_t \cos \Theta_i}$$

$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{2 n_i \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_t + n_t \cos \Theta_i}$$



wzory Fresnela, podsumowanie

nowe oznaczenia:

$$r_{\perp} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right)_{\perp}, \quad t_{\perp} = \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right)_{\perp}$$
$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right)_{\parallel}, \quad t_{\parallel} = \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right)_{\parallel}$$

prawo Snella daje:

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\Theta_i - \Theta_t)}{\sin(\Theta_i + \Theta_t)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \Theta_t \cos \Theta_i}{\sin(\Theta_i + \Theta_t)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\Theta_i - \Theta_t)}{\tan(\Theta_i + \Theta_t)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \Theta_t \cos \Theta_i}{\sin(\Theta_i + \Theta_t) \cos(\Theta_i - \Theta_t)}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \Theta_i - n_t \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_i + n_t \cos \Theta_t}$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_i \cos \Theta_i}{n_i \cos \Theta_i + n_t \cos \Theta_t}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_i \cos \Theta_t - n_t \cos \Theta_i}{n_i \cos \Theta_t + n_t \cos \Theta_i}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_t + n_t \cos \Theta_i}$$

padanie normalne

traci sens podział na fale s i p:

$$r = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

$$t = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

natężenia (wykład 2):

$$I_r = \frac{\eta_0}{2} |E_{r0}|^2 = \frac{\eta_0}{2} |rE_{i0}|^2 = |r|^2 I_i$$

Z zasady zachowania energii mamy

$$I_t = I_i - I_r = (1 - |r|^2) I_i$$

co daje

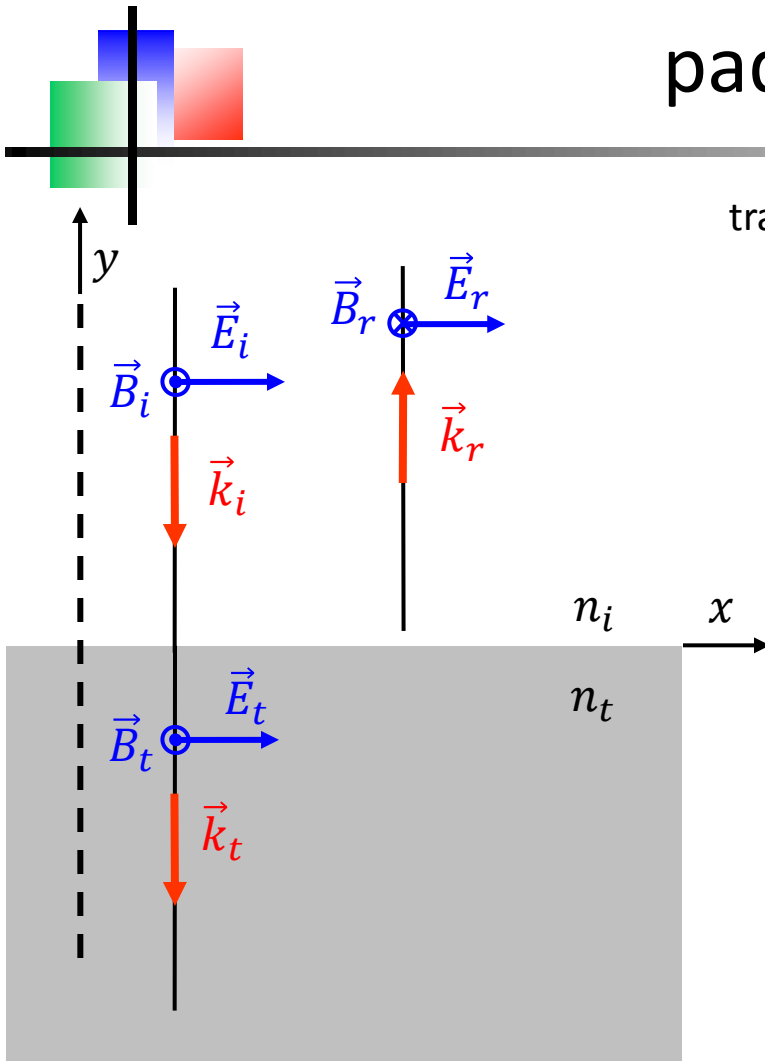
$$I_t = \frac{n_t}{n_i} |t|^2 I_i$$

jednocześnie:

$$\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)^2 = |t|^2$$

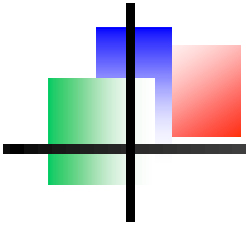
Co daje nową formułę na natężenie światła

$$I = \frac{n\eta_0}{2} |E_0|^2$$



Liczby dla granicy powietrze-szkło:

$$n_i = 1, n_t = 1.5, R = |r|^2 = 0.04$$



natężenie fali EM w dielektryku

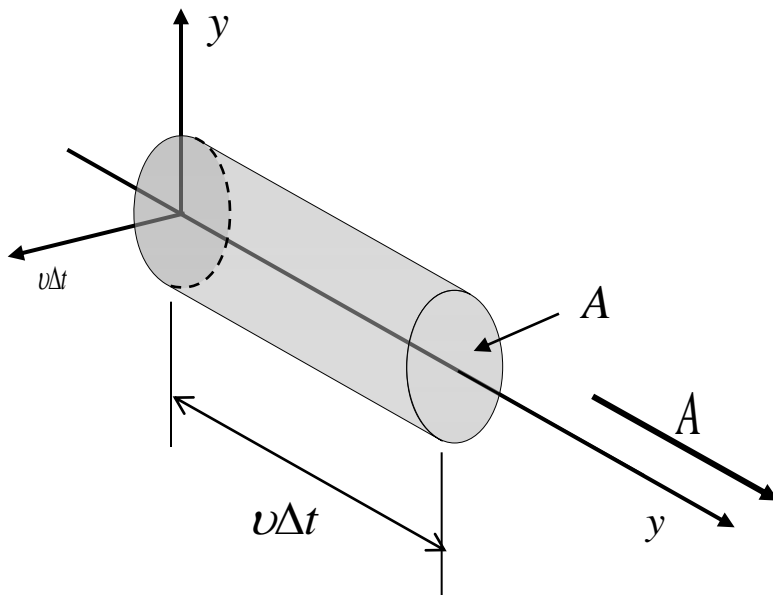
wykład 2:

gęstość energii pola EM w próżni $u_{vac} = u_B + u_E = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$

w dielektryku: $u_{die} = u_B + u_E = \frac{1}{2}(\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_0^2}{2} = n^2 u_{vac}$

strumień energii (natężenie) w próżni:

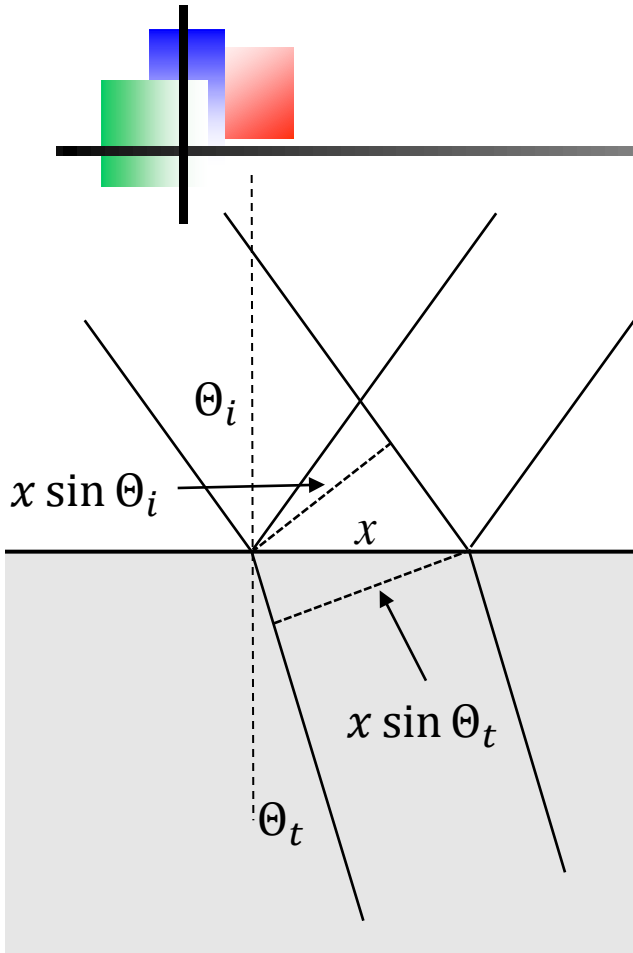
$$S_{vac} = \frac{u_{vac} c \Delta t A}{\Delta t A} = u_{vac} c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}$$



strumień energii (natężenie) w dielektryku:

$$S_{die} = \frac{u_{die} v \Delta t A}{\Delta t A} = u_{die} v = n^2 u_{vac} \frac{c}{n} = n S_{vac}$$

transmisja i odbicie - moc



stosunek mocy wiązki obitej do mocy wiązki padającej:

$$R_{moc} = \frac{I_r x \cos \Theta_r}{I_i x \cos \Theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = |r|^2$$

stosunek mocy wiązki załamanej do mocy wiązki padającej:

$$T_{moc} = \frac{I_t x \cos \Theta_t}{I_i x \cos \Theta_i} = \frac{I_t \cos \Theta_t}{I_i \cos \Theta_i}$$

natężenie światła w dielektryku:

$$I = n \frac{\eta_0 E_0^2}{2}$$

zatem:

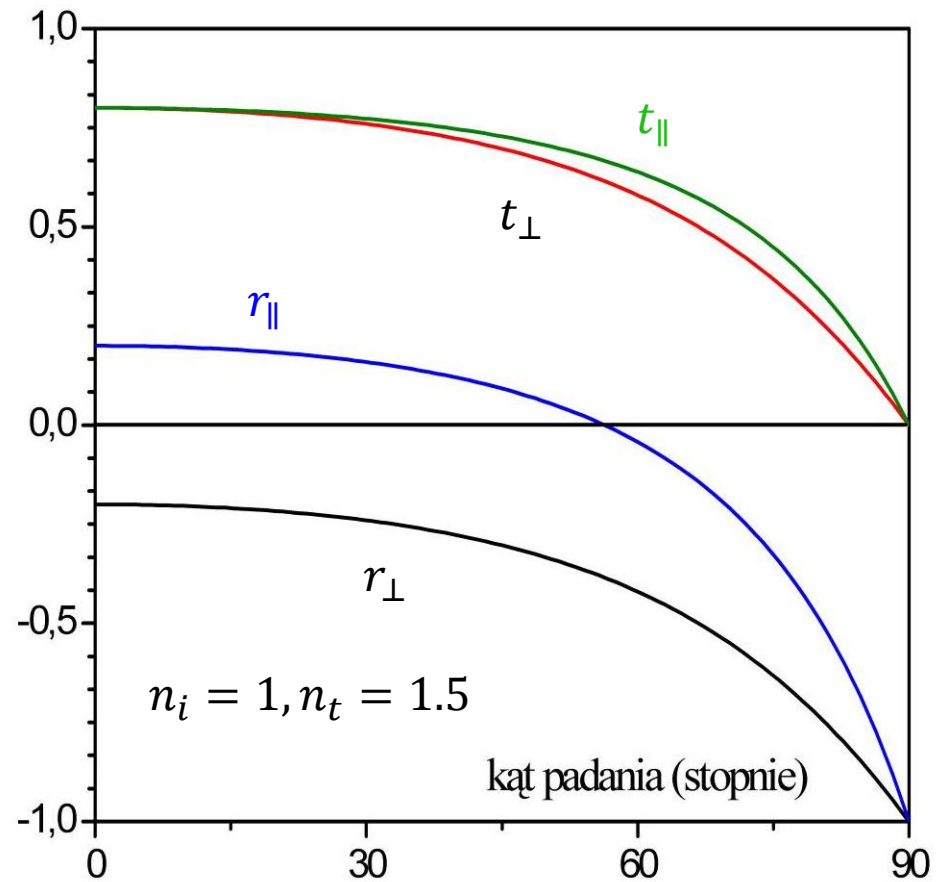
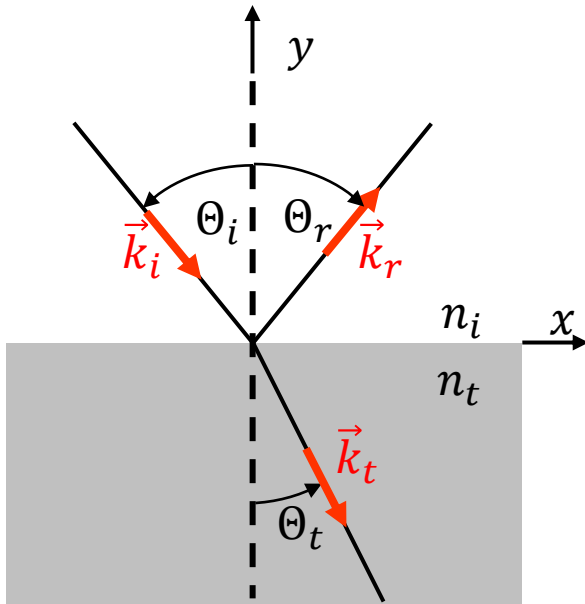
$$T_{moc} = \frac{I_t \cos \Theta_t}{I_i \cos \Theta_i} = \frac{n_t E_{t0}^2 \cos \Theta_t}{n_i E_{i0}^2 \cos \Theta_i} = \left(\frac{n_t \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_i} \right)^2 |t|^2$$

padanie zewnętrzne, 1

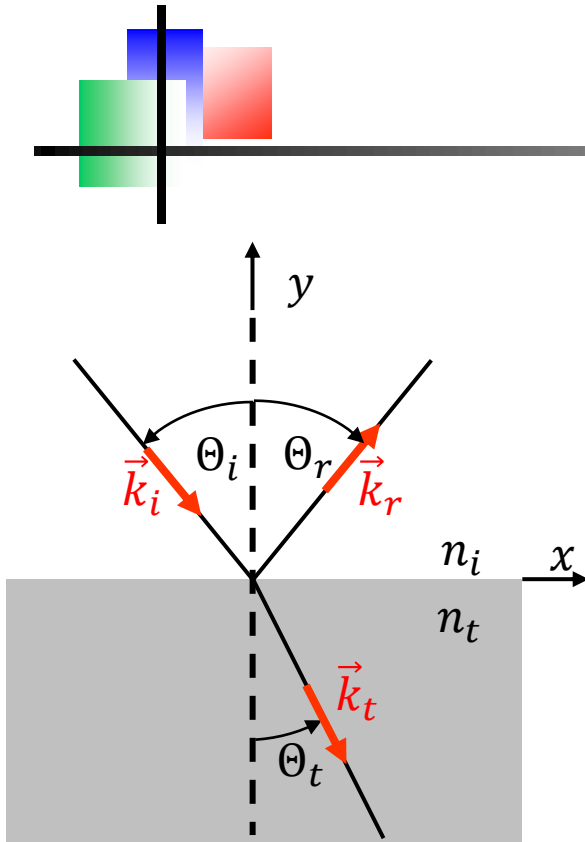
padanie zewnętrzne: $n_i < n_t$

$$\sin \Theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \Theta_i < 1$$

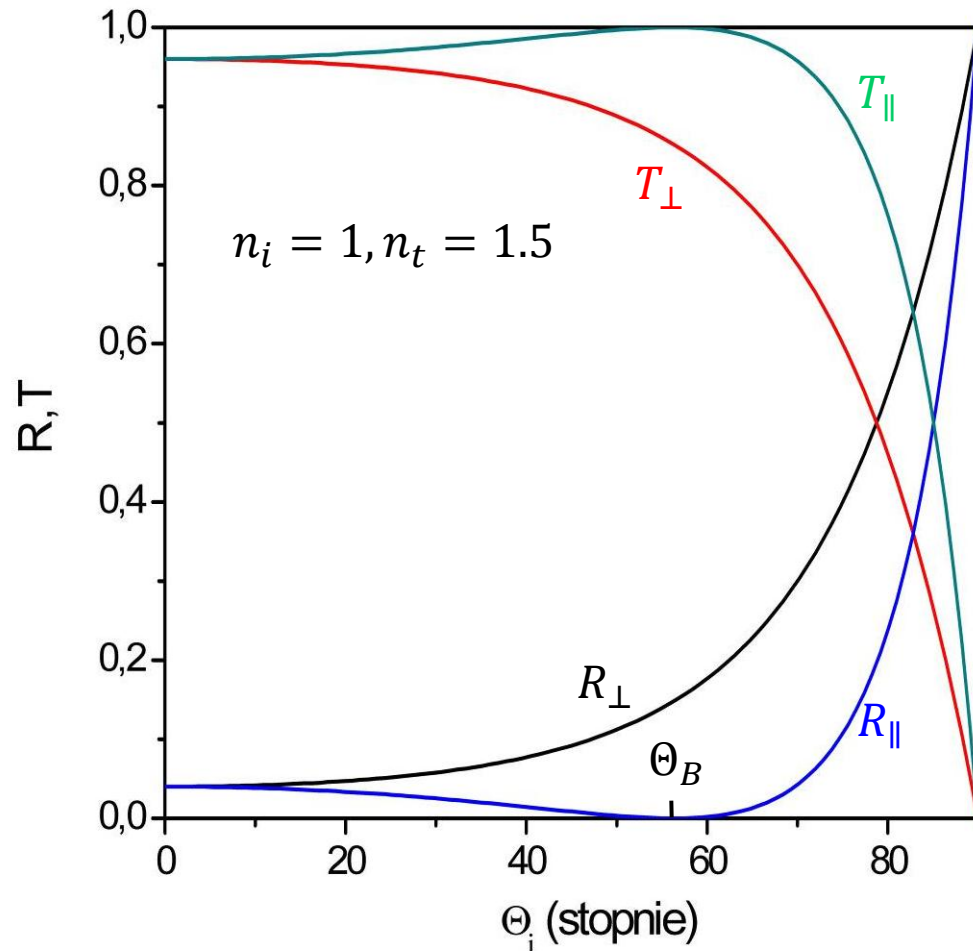
- dla każdego kąta padania istnieje fala załamana



padanie zewnętrzne, 2



padanie zewnętrzne: $n_i < n_t$

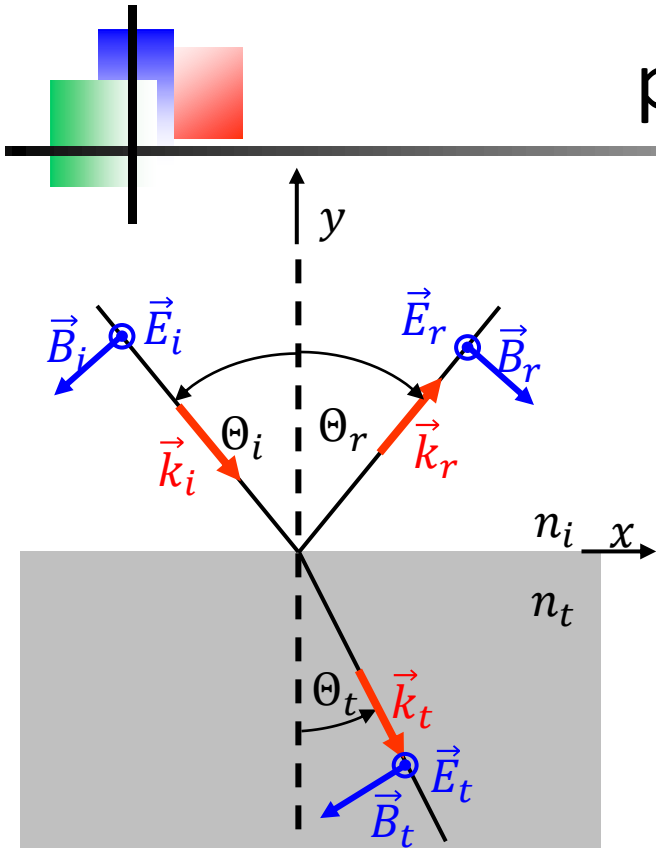


Kąt Brewstera:

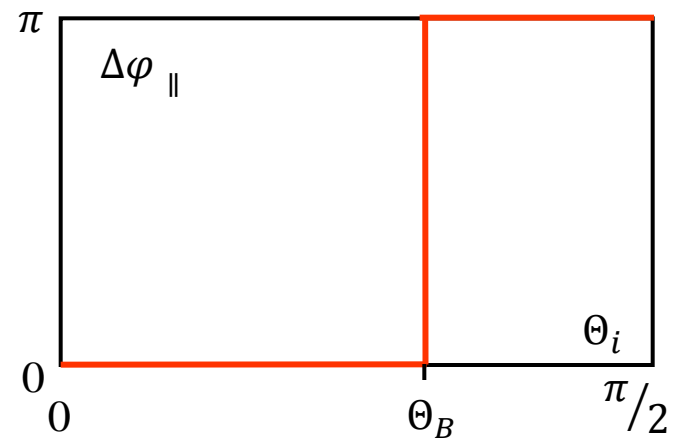
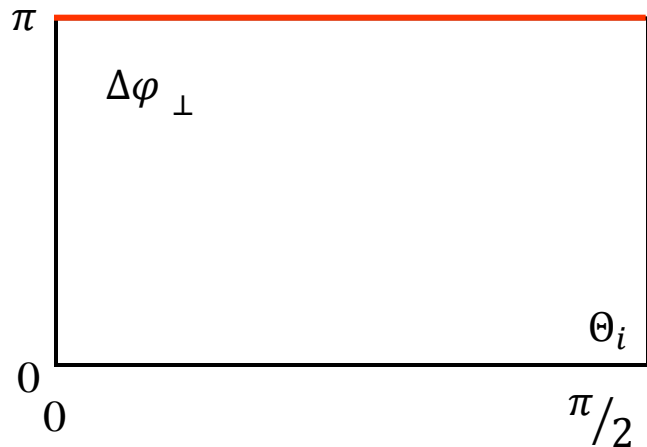
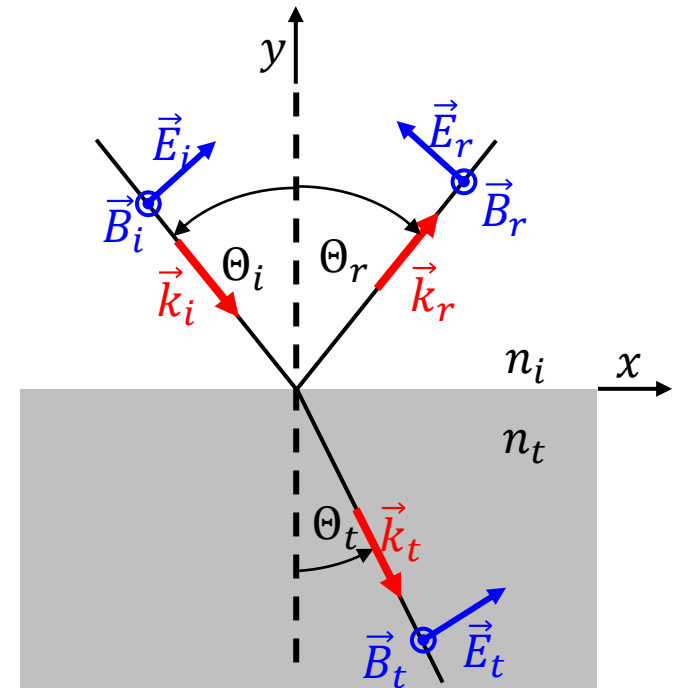
$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\Theta_i - \Theta_t)}{\tan(\Theta_i + \Theta_t)}$$

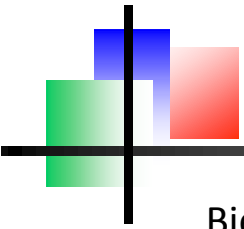
dla $\Theta_i + \Theta_t = \pi/2$ $r_{\parallel} = 0$

padanie zewnętrzne, 3



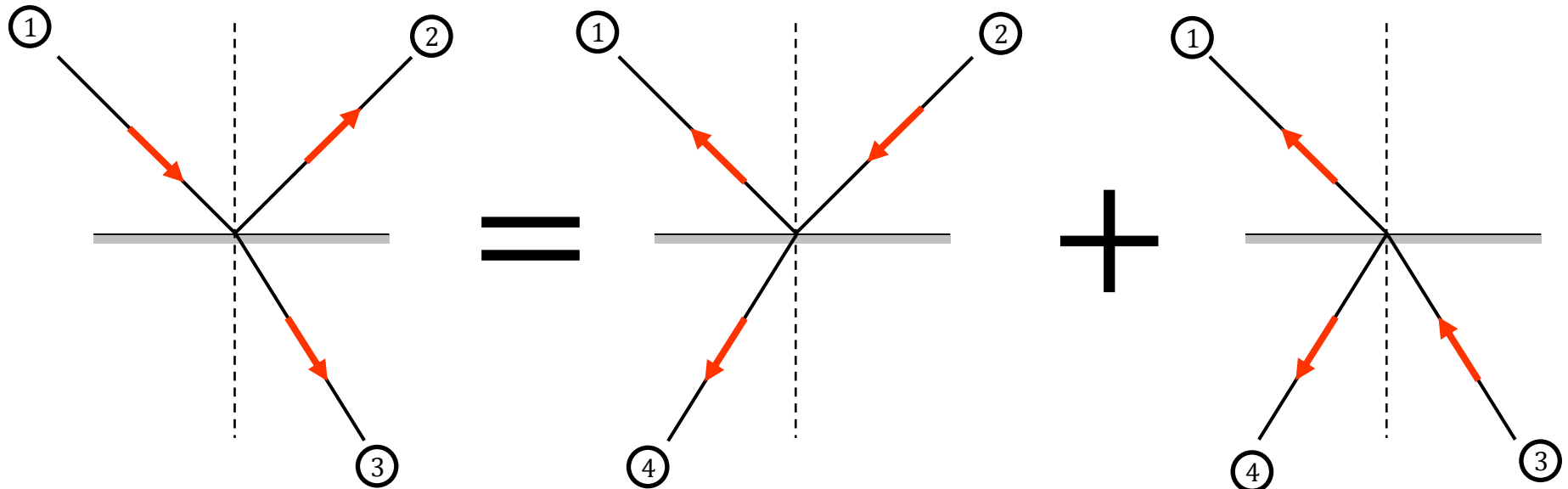
$$r = |r|e^{i\Delta\varphi}$$





Relacje Stokesa

Bieg wiązki światła jest odwracalny



t, r - amplitudowe współczynniki transmisji i odbicia dla światła wchodzącego od góry
 t', r' - amplitudowe współczynniki transmisji i odbicia dla światła wchodzącego od dołu

$$r r \vec{E}_i + t' t \vec{E}_i = \vec{E}_i$$

(2)
(3)
(1)

$$t r \vec{E}_i + r' t \vec{E}_i = 0$$

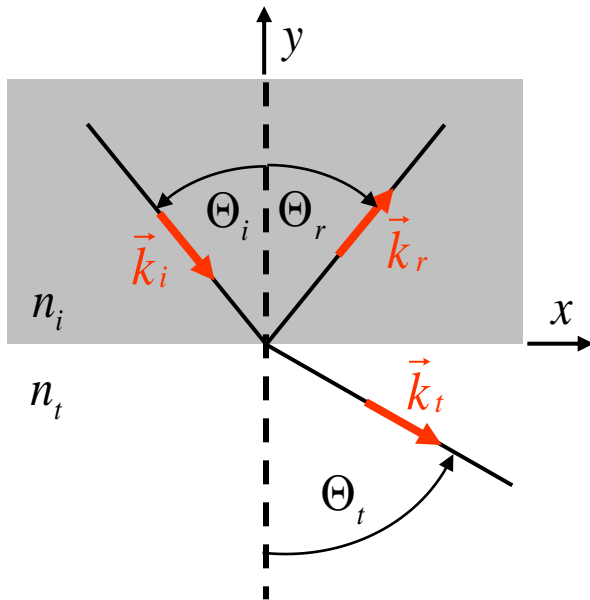
(2)
(3)
(4)

$$r = -r'$$

$$t t' = 1 - r r'$$

padanie wewnętrzne, 1

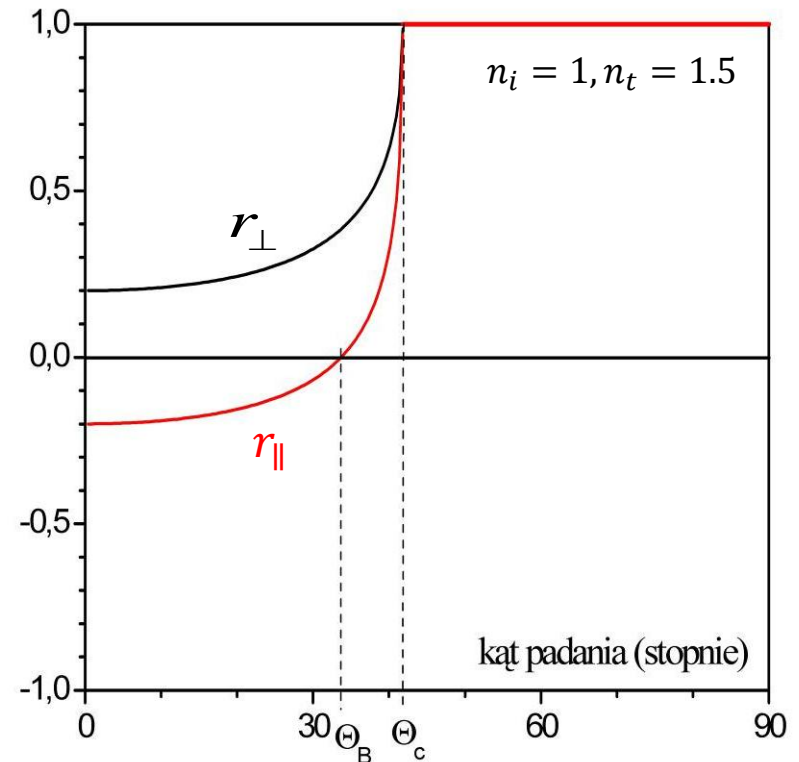
padanie wewnętrzne: $n_i > n_t$



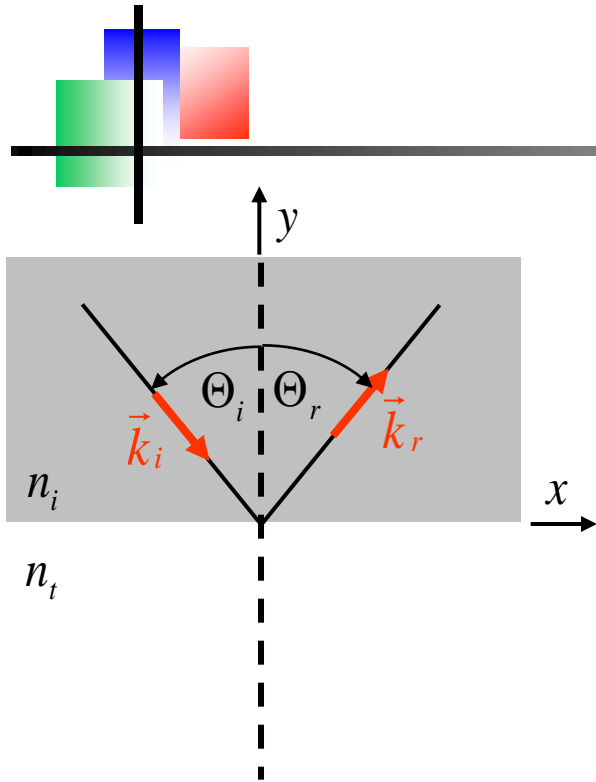
$\Theta_i < \Theta_c$, $\sin \Theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \Theta_i < 1$ - fala załamana

$\Theta_i > \Theta_c$, $\sin \Theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \Theta_i > 1$ - całkowite wewnętrzne odbicie

$\Theta_i = \sin^{-1}(n_t/n_i)$ - kąt krytyczny



padanie wewnętrzne, 2



Przyjmijmy: $\Theta_i > \Theta_c$ i policzmy

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \Theta_i - n_t \cos \Theta_t}{n_i \cos \Theta_i + n_t \cos \Theta_t}$$

$$\cos \Theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta_t} = i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t} \sin \Theta_i\right)^2 - 1}$$

$$r_{\perp} = \frac{\cos \Theta_i + i \sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}{\cos \Theta_i - i \sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}, \quad n = n_t / n_i$$

mamy zatem

$$r_{\perp} = e^{-i\delta_{\perp}}$$

$$|r_{\perp}|^2 = 1$$

$$\tan\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}{\cos \Theta_i}$$

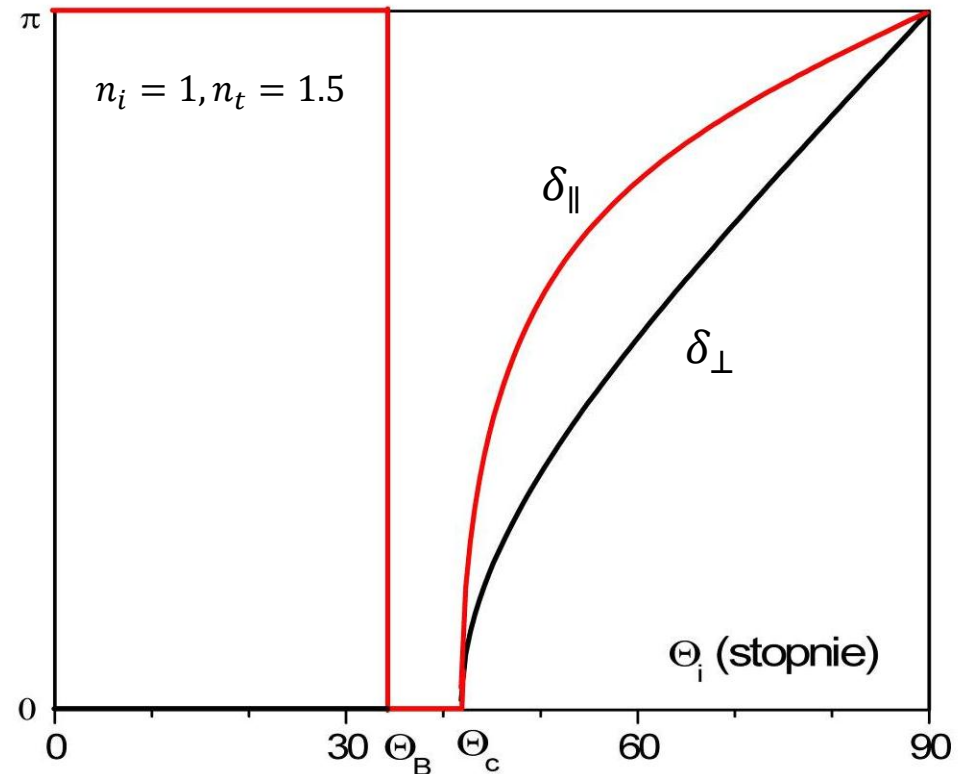
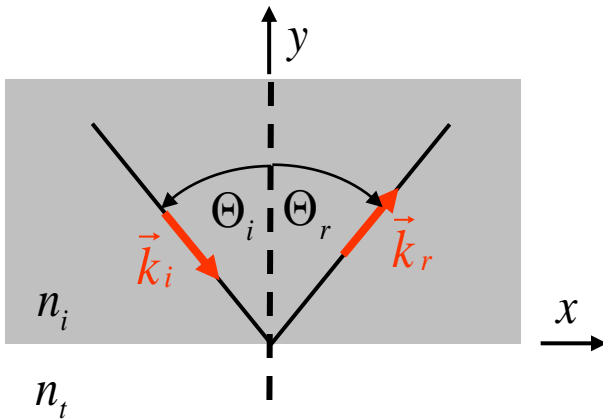
padanie wewnętrzne, 3

dla polaryzacji p mamy:

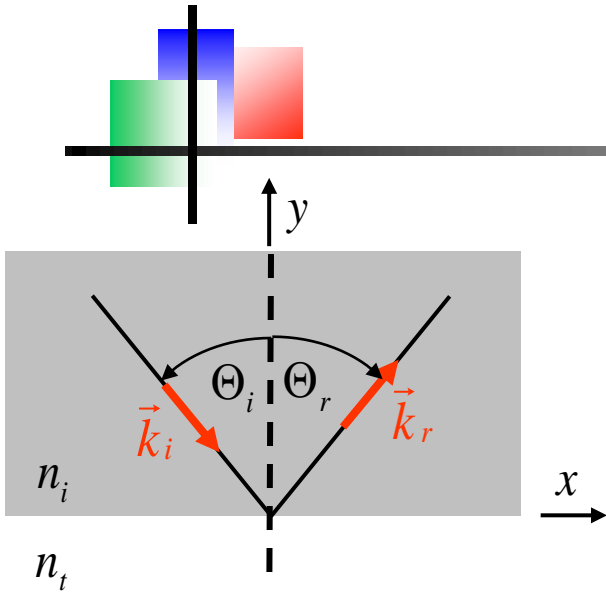
$$r_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \Theta_i - i\sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}{n^2 \cos \Theta_i + i\sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}$$

oraz

$$\tan\left(\frac{\delta_{\parallel}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}{n^2 \cos \Theta_i}$$

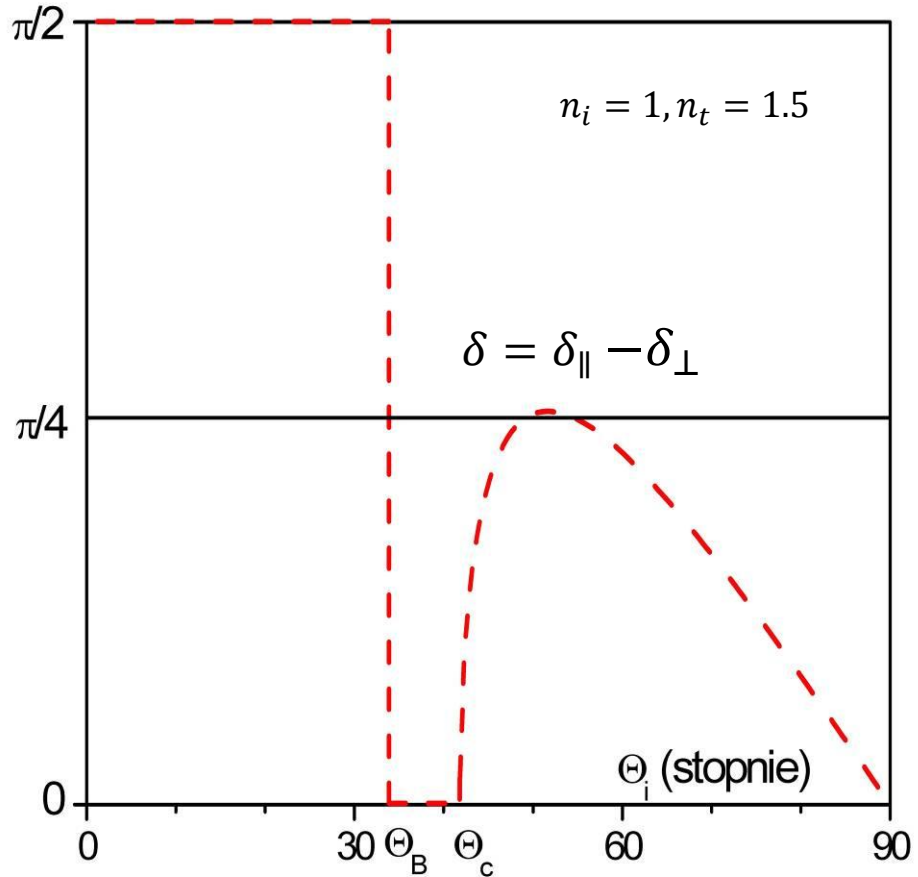


padanie wewnętrzne, 4



różnica faz dla prostopadłych polaryzacji:

$$\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = \frac{\cos \Theta_i \sqrt{\sin^2 \Theta_i - n^2}}{\sin^2 \Theta_i}$$



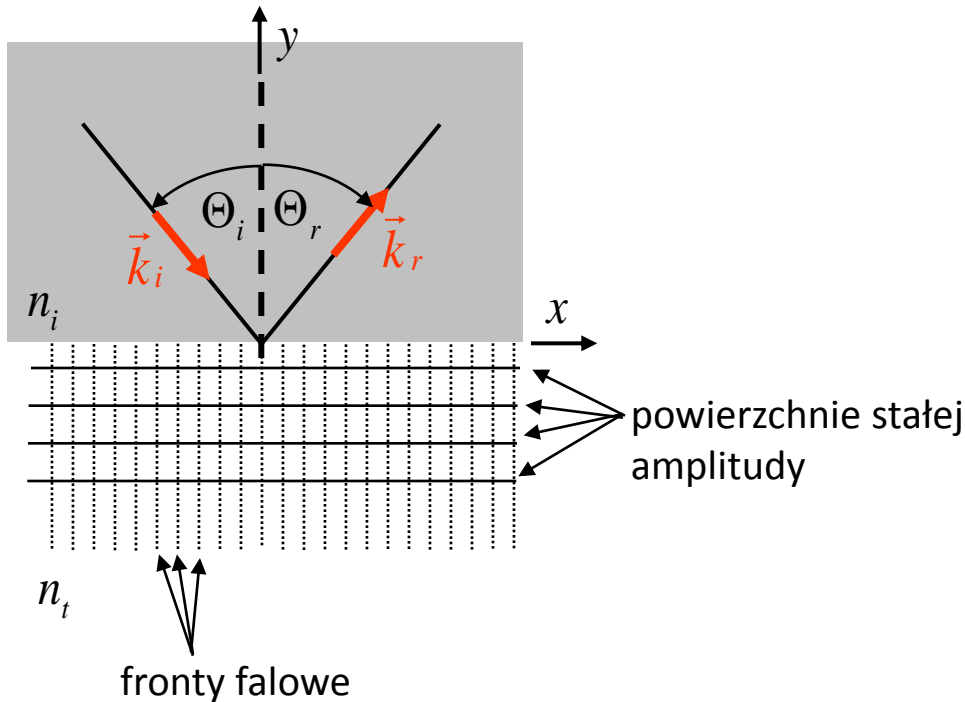
padanie wewnętrzne, 5

fala w rzadszym ośrodku: $E_t(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Policzmy fazę przestrzenną:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} &= k_t \sin \Theta_t x + k_t \cos \Theta_t y = \frac{n_t \omega}{c} \left(x \sin \Theta_t + iy \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_i} \right) \\ &= k_{tx} x + i \frac{\alpha}{2} y \end{aligned}$$

$$k_{tx} = \frac{\omega}{c} n_i \sin \Theta_i, \alpha = 2 \frac{\omega}{c} n_t \sqrt{n^2 \sin^2 \Theta_i - 1}$$



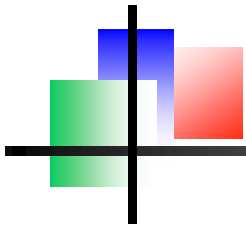
fala zanikająca (ewanescencyjna)

$$E_t(\vec{r}, t) = E_0 e^{-\frac{\alpha}{2} y} e^{i(k_{tx} x - \omega t)}$$

$$I(\vec{r}) = I_0 e^{-\alpha y}$$

głębokość wnikańia:

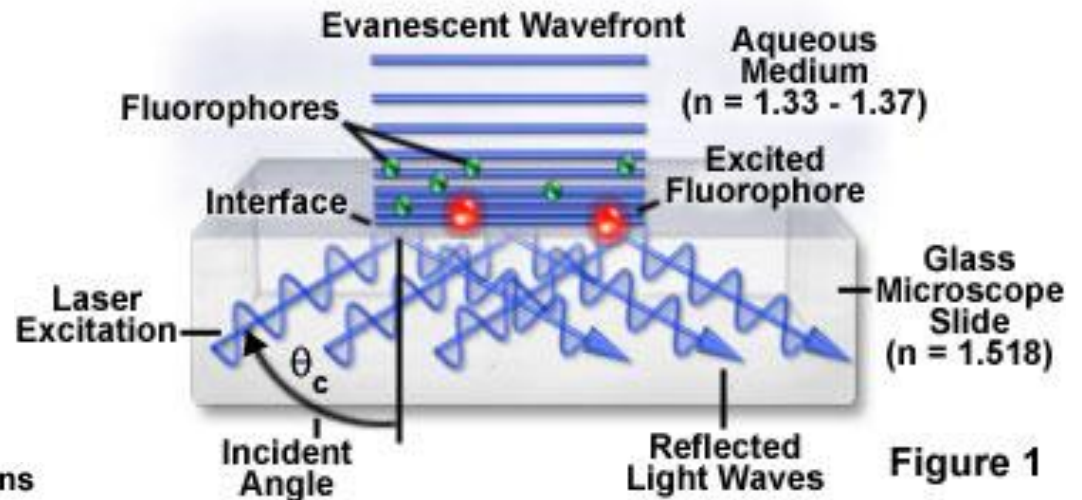
$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{2\lambda}{\sqrt{n^2 \sin^2 \Theta_i - 1}}$$



TIRFM – Total Internal Reflexion Fluorescence Microscopy

Mikroskopia fluorescencyjna w całkowitym wewnętrznym odbiciu – dobra rozdzielczość podłużna.

Total Internal Reflection Fluorescence



TIRFM Specimen Illumination Configurations

